Grado en Matemáticas

Análisis Funcional – Examen Parcial

1. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = t \int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Prueba que es continuo y calcula su norma.

2. Sea $A = \{e_{2n-1} + e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

   a) Describe los espacios $M = A^{\perp}$ y $M^{\perp}$.

   b) Calcula las proyecciones ortogonales sobre M y $M^{\perp}$.

3. Sea M un subespacio vectorial de un espacio normado X y $T \in L(M, \ell_\infty)$. Prueba que existe $S \in L(X, \ell_\infty)$ que extiende a T y $\|S\| = \|T\|$.

4. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba, y, cuando sean falsas, indica un contraejemplo.

   a) Si X, Y son espacios de Banach y la dimensión de Y es finita, entonces todo operador lineal de X sobre Y es continuo.

   b) Sean $\| \,.\, \|$ y $|\!|\!| \,.\, |\!|\!|$ dos normas completas no equivalentes en un espacio vectorial X. Entonces la aplicación identidad $I_X : (X, \| \,.\, \|) \to (X, |\!|\!| \,.\, |\!|\!|)$ no es continua.

   c) Sean $\| \,.\, \|_1$ y $\| \,.\, \|_2$ dos normas completas en un espacio vectorial X que tienen los mismos funcionales lineales continuos. Entonces dichas normas son equivalentes.

   d) Sea $\{f_n\}$ una sucesión puntualmente acotada de funcionales lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ se obtiene un funcional lineal continuo de X en ℓ_∞.

5. Responde a uno de los dos siguientes temas.

   a) Aproximación óptima a un convexo. Teorema de la proyección ortogonal.

   b) Teorema de Hahn-Banach (versión analítica). Algunas consecuencias inmediatas.

   c) Lema de categoría de Baire. Teorema de Banach – Steinhaus.

Nota. No pierdas tiempo probando que las aplicaciones en los ejercicios son lineales.

Granada, 21 de noviembre de 2018